305

F

305F

نام:
نام خانوادگی:
محل امضا:

«اگر دانشگاه اصلاح شود مملکت اصلاح می‌شود.»
امام خمینی (ره)

صبح جمعه
۱۳۹۵/۱۲/۶
دفترچه شماره (۱)

جمهوری اسلامی ایران
وزارت علوم، تحقیقات و فنّاوری
سازمان سنجش آموزش کشور

آزمون ورودی
دورهٔ دکتری (نیمه‌متمرکز) داخل ـ سال ۱۳۹۶

رشتهٔ امتحانی مهندسی مکانیک ـ دینامیک، کنترل و ارتعاشات (کد ۲۳۲۳)

تعداد سؤال: ۴۵ | مدت پاسخگویی: ۱۵۰ دقیقه

عنوان مواد امتحانی، تعداد و شماره سؤالات

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره
۱	مجموعهٔ دروس تخصصی (ریاضیات مهندسی ـ دینامیک پیشرفته ـ ارتعاشات پیشرفته ـ کنترل پیشرفته)	۴۵	۱	۴۵

این آزمون نمرهٔ منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

اسفندماه ـ سال ۱۳۹۵

حق چاپ، تکثیر و انتشار سؤالات به هر روش (الکترونیکی و ...) پس از برگزاری آزمون، برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز این سازمان مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

ریاضیات مهندسی:

۱- با فرض اینکه $x=-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin(nx)$ ، $-\pi<x<\pi$ و $|x|=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}$ ، $-\pi<x<\pi$

آنگاه سری فوریهٔ مثلثاتی تابع $f(x)=\begin{cases}x & ,0<x<\pi\\ 0 & ,-\pi<x\le 0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)$

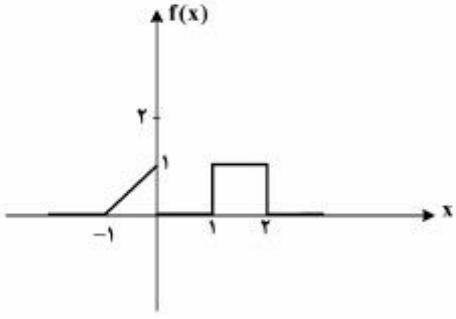
۲) $f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)$

۳) $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)$

۴) $f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(-1)^k\sin(kx)$

۲- برای تابع نشان داده شده در شکل، چنانچه نمایش انتگرال فوریهٔ آن را به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}[A(\omega)\cos\omega x+B(\omega)\sin\omega x]d\omega$$



آنگاه حاصل انتگرال $\int_0^{\infty}[A(\omega)]^2d\omega$ کدام است؟

۱) ۰

۲) $\frac{2}{3\pi}$

۳) $\frac{2}{3}$

۴) $\frac{2\pi}{3}$

۳- اگر $f(x)=\int_0^{\infty}\frac{2\omega}{1+\omega^2}\sin\omega x\,d\omega$ ، آنگاه $I=\int_0^{\infty}f(x)\sin^3 x\,dx$ کدام است؟

۱) $\frac{3\pi}{10}$

۲) $\frac{3\pi}{5}$

۳) $\frac{5\pi}{12}$

۴) $\frac{8\pi}{25}$

۴- معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی $u_{xx}+u_{yy}+u_y-u=0$ در داخل مستطیل $a<x<b$ و $0<y<1$ به همراه شرایط مرزی $u(a,y)=u(b,y)=0$ و $u(x,0)=0$ داده شده است. اگر برای این مسئله $u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, u_k(x,y)$ باشد، که در آن c_k ها ضرایب ثابت هستند، آنگاه تابع $u_k(x,y)$ کدام است؟

۱) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b+a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

۲) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{2+\alpha_k^2}}{2}$

۳) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b+x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

۴) $(e^{r_1 y}-e^{r_2 y})\sin\alpha_k(b-x),\ \alpha_k=\dfrac{k\pi}{b-a},\ r=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4(1+\alpha_k^2)}}{2}$

۵- برای حل مسئلهٔ مقدار مرزی غیرهمگن داده شده با شرایط اولیه و مرزی همگن به‌صورت زیر:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+(1-x)\sin t=\dfrac{\partial u}{\partial t}, & 0<x<1,\quad t>0\\ u(0,t)=u(1,t)=u(x,0)=0, & 0<x<1,\ t>0\end{cases}$$

می‌توان از بسط فوریه به‌صورت زیر استفاده نمود.

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)\sin(n\pi x),\quad F(x,t)=(1-x)\sin t=\sum_{n=1}^{\infty} F_n(t)\sin(n\pi x)$$

کدام‌یک از عبارت‌های زیر صحیح است؟

۱) $u_n'(t)-n^2\pi^2 u_n(t)=\dfrac{\sin t}{n\pi},\ F_n(t)=\dfrac{2}{n\pi}\sin t$

۲) $u_n'(t)-n^2\pi^2 u_n(t)=\dfrac{2\sin t}{n\pi},\ F_n(t)=\dfrac{1}{n\pi}\sin t$

۳) $u_n'(t)+n^2\pi^2 u_n(t)=\dfrac{2\sin t}{n\pi},\ F_n(t)=\dfrac{2}{n\pi}\sin t$

۴) $u_n'(t)+n^2\pi^2 u_n(t)=\dfrac{\sin t}{n\pi},\ F_n(t)=\dfrac{1}{n\pi}\sin t$

۶- مسئلهٔ مقدار اولیهٔ $\frac{\partial^۲ y}{\partial t^۲} = c^۲ \frac{\partial^۲ y}{\partial x^۲}$ ، $t > ۰$ ، $-\infty < x < \infty$ با شرایط اولیهٔ $y(x,۰) = e^{-|x|}$ ، $\frac{\partial y}{\partial t}(x,۰) = ۰$ با فرض آن که پاسخ مسئله به شکل $y(x,t) = \int_۰^\infty [a(\omega)\cos(\omega x) + b(\omega)\sin(\omega x)].\cos(\omega c t)\,d\omega$ باشد، آنگاه $a(\omega)$ و $b(\omega)$ ، کدام است؟

۱) $b(\omega) = \frac{۱}{\pi(۱+\omega^۲)}$ ، $a(\omega) = ۰$

۲) $a(\omega) = \frac{۲}{\pi(۱+\omega^۲)}$ ، $b(\omega) = ۰$

۳) $a(\omega) = \frac{۱}{\pi(۱+\omega^۲)}$ ، $b(\omega) = ۰$

۴) $b(\omega) = \frac{۲}{\pi(۱+\omega^۲)}$ ، $a(\omega) = ۰$

۷- به ازای کدام ثابت‌های γ ، معادلهٔ دیفرانسیل با مشتقات جزئی $\frac{\partial^۲ w}{\partial x \partial y} + \gamma w = ۰$ دارای جواب کراندار غیر صفر به‌صورت $w(x,y) = F(x)G(y)$ ، در تمام ربع اول صفحهٔ xy می‌باشد؟

۱) $\gamma < ۰$

۲) $\gamma > ۰$

۳) $\forall \gamma \in \mathbb{R}$

۴) مسئله جواب ندارد

۸- اگر $z = x + iy$ عدد مختلط باشد، آنگاه $\mathrm{Im}(\frac{z}{\pi}.\cosh z)$، (قسمت موهومی) کدام است؟

۱) $\frac{x}{\pi}\cosh x \cos y - \frac{y}{\pi}\sinh x \sin y$

۲) $\frac{x}{\pi}\sinh x \sin y + \frac{y}{\pi}\cos h\, x \cos y$

۳) $\frac{x}{\pi}\sinh x \cos y + \frac{y}{\pi}\cosh x \sin y$

۴) $-\frac{x}{\pi}\sinh x \sin y + \frac{y}{\pi}\cos h\, x \cos y$

۹- اگر $\mathrm{Im}(\mathrm{Log}\frac{z-۱}{z+۱}) = c$ (قسمت موهومی) و c ثابت و مخالف صفر باشد، آنگاه بیان این معادله برحسب x و y کدام است؟

۱) $x^۲ + (y - \cot c)^۲ = ۱$

۲) $x^۲ + (y - \tan c)^۲ = \frac{۱}{\cos^۲ c}$

۳) $x^۲ + (y - \cot c)^۲ = \frac{۱}{\sin^۲ c}$

۴) $x^۲ + (y - \tan c)^۲ = \tan^۲ c$

۱۰- حداکثر مقدار $|e^{۳z-i}|$ ، در ناحیهٔ $|z| \le \frac{۱}{۲}$، کدام است؟

۱) ۱

۲) e

۳) $e^۲$

۴) $e^{\frac{۳}{۲}}$

۱۱- تصویر نیمِ صفحهٔ سمت چپ محور موهومی تحت نگاشت $w = \tanh z$، کدام است؟

۱) نیم صفحهٔ سمت راست محور موهومی

۲) نیم صفحهٔ پایینی محور حقیقی

۳) نیم صفحهٔ بالایی محور حقیقی

۴) نیم صفحهٔ چپ محور موهومی

۱۲- اگر $f(z)$ یک تابع تام (در کل صفحهٔ مختلط تحلیلی)، $f(0)=1$ و $|f(z)+i-z^2|\le 2$ ، برای هر $z\in\mathbb{C}$، که در آن $i=\sqrt{-1}$ ، آنگاه مقدار $f(2)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) i
۳) ۲
۴) ۵

۱۳- در بسط تیلور تابع $f(z)=z\sin z$ حول $z=i$ ، ضریب $(z-i)^5$ کدام است؟

۱) $\frac{i}{5!}(\sinh 1+5\cosh 1)$
۲) $\frac{i}{5!}(\cosh 1+5\sinh 1)$
۳) $\frac{i}{5!}(\sinh 1+\cosh 1)$
۴) $\frac{i}{5!}(\cosh 5+\sinh 5)$

۱۴- اگر C مربع $|x|+|y|=4$ پیموده شده در جهت مثلثاتی باشد، آنگاه مقدار انتگرال $\oint_C \frac{z}{1+e^z}dz$ ، کدام است؟

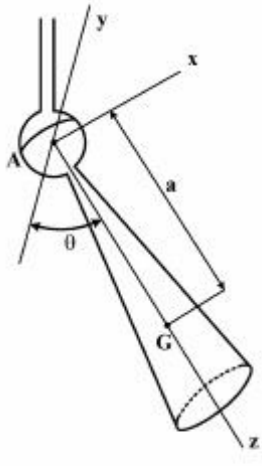
۱) ۰
۲) $2\pi^2$
۳) $4\pi^2$
۴) $4\pi^2 i$

۱۵- اگر تابع مختلط $f(z)$ دارای سری لوران $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$ در طوق $1-\delta<|z|<1+\delta$ ، $\delta>0$، باشد و قرار دهیم $F(\theta)=f(e^{i\theta})=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{im\theta}$ ، آنگاه بیان c_n برحسب $F(\theta)$ کدام است؟

۱) $c_n=\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}F(\theta)d\theta$
۲) $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}F(\theta)d\theta$
۳) $c_n=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta}F(\theta)d\theta$
۴) $c_n=0$

دینامیک پیشرفته:

۱۶- فرفرهٔ مخروطی دارای جرم m و گشتاور اینرسی $I_x=I_y=I$ و $I_z=\frac{I}{4}$ می‌باشد. اگر فرفره آزادانه توسط اتصال کاسه ـ ساچمه‌ای در A با سرعت زاویه‌ای ثابت ω_s حول z بچرخد، سرعت زاویه‌ای تقدیمی آن حول محور قائم در $\theta=45^\circ$ ، از کدام معادله به‌دست می‌آید؟



۱) $\Omega^2-\frac{\sqrt{2}}{3}\omega_s\Omega-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{Mga}{I}=0$
۲) $\Omega^2+\frac{\sqrt{2}}{3}\omega_s\Omega-\frac{4\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{Mga}{I}=0$
۳) $\Omega+\frac{4Mga}{I\omega_s}=0$
۴) $\Omega-\frac{4Mga}{I\omega_s}=0$

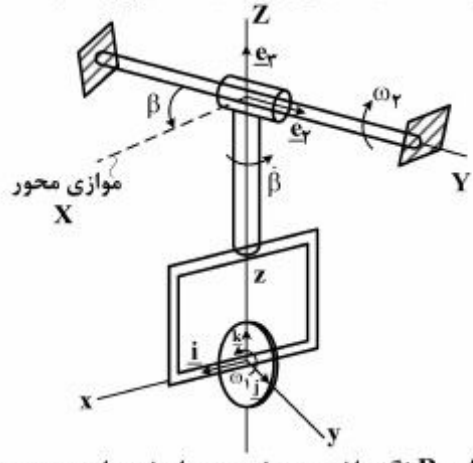
۱۷- در سیستم ژیروسکوپی زیر، روابط زیر برقرار است.

$$\underline{e}_۲ = -\cos\beta\,\underline{i} + \sin\beta\,\underline{j}$$

$$\dot{\underline{i}} = \dot{\beta}\,\underline{j} + \omega_۲ \sin\beta\,\underline{k}$$

$$\dot{\underline{e}}_۲ = -\omega_۲(\sin\beta\,\underline{i} + \cos\beta\,\underline{j})$$

که در آن‌ها $\dot{\underline{i}}$ و $\dot{\underline{e}}_۲$ مشتقات زمانی بردارهای یکّه هستند. مؤلفهٔ در امتداد y شتاب زاویه‌ای دیسک، برابر کدام است؟



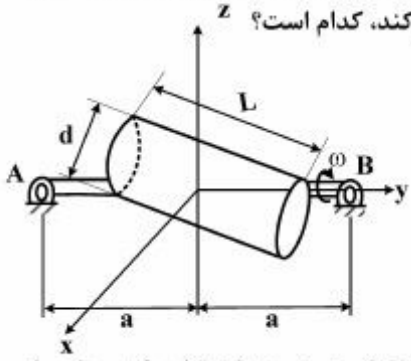
۱) $\omega_۱\dot{\beta} + \dot{\omega}_۲\sin\beta + \dot{\beta}\omega_۲\cos\beta$

۲) $\omega_۱\dot{\beta} - \dot{\omega}_۲\sin\beta - \dot{\beta}\omega_۲\cos\beta$

۳) $\omega_۱\dot{\beta} - \dot{\omega}_۲\sin\beta + \dot{\beta}\omega_۲\cos\beta$

۴) $\omega_۱\dot{\beta} + \dot{\omega}_۲\sin\beta - \dot{\beta}\omega_۲\cos\beta$

۱۸- استوانه‌ای همگن به جرم m روی محوری که توسط یاتاقان‌های A و B نگهداشته می‌شود، سوار شده است. محور تحت کوپل $M\hat{j}$ قرار داشته و به دلیل وجود اصطکاک سرعت زاویه‌ای آن ثابت و برابر $\omega\hat{j}$ می‌باشد. مؤلفهٔ قائم عکس‌العمل یاتاقان A در لحظه‌ای که محور استوانه از صفحهٔ افقی عبور می‌کند، کدام است؟



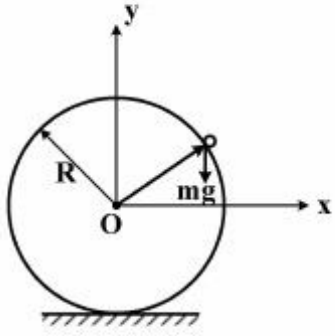
۱) $\sqrt{۲}mg$

۲) $\frac{mg}{۲}$

۳) mg

۴) $\frac{mg}{۴}$

۱۹- یک ذره به جرم m روی سطح خارجی یک حلقهٔ ثابت به شعاع R در حرکت است. در چه لحظه‌ای ذره سطح را ترک خواهد کرد؟ $K = \sqrt{\frac{۲g}{R}}$



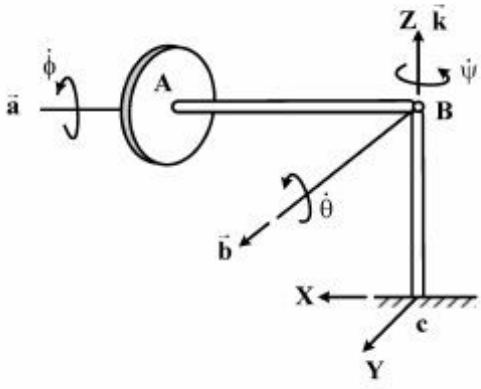
۱) $t = \dfrac{(-۱+\sin\theta)\sqrt{۲(۱+\sin\theta)}\,\tanh^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲(۱+\sin\theta)}}{۲}\right)}{k\sqrt{۱-\sin\theta}}$

۲) $t = \dfrac{(۱-\sin\theta)\sqrt{۲(۱+\sin\theta)}\,\tanh^{-۱}\left(\sqrt{۲(۱+\sin\theta)}\right)}{k(۱-\sin\theta)}$

۳) $t = \dfrac{(۱-\sin\theta)\sqrt{۲(۱+\sin\theta)}\,\tanh^{-۱}\left(\sqrt{(۱+\sin\theta)/۲}\right)}{k\sqrt{۱+\sin\theta}}$

۴) $t = \dfrac{(۱-\sin\theta)\sqrt{(۱+\sin\theta)}\,\tan^{-۱}\left(\sqrt{۱+\sin\theta}\right)}{k\sqrt{۱-\sin\theta}}$

۲۰- شتاب زاویه‌ای جسم AB ، کدام است؟



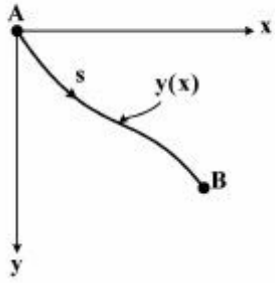
۱) $(\ddot{\phi}+\dot{\theta}\dot{\Psi})I+(\ddot{\theta}+\dot{\theta}\dot{\Psi})J+(\ddot{\Psi}+\dot{\phi}\dot{\theta})k$

۲) $(\ddot{\Psi}+\dot{\theta}\dot{\Psi})I+(\ddot{\phi}+\dot{\theta}\dot{\Psi})J+(\ddot{\Psi}+\dot{\phi}\dot{\theta})k$

۳) $(\ddot{\theta}+\dot{\theta}\dot{\Psi})I+(\ddot{\phi}+\dot{\theta}\dot{\Psi})J+(\ddot{\phi}+\dot{\phi}\dot{\theta})k$

۴) $(\ddot{\Psi}-\dot{\theta}\dot{\Psi})I+(\ddot{\theta}+\dot{\phi}\dot{\Psi})J+(\ddot{\Psi}-\dot{\phi}\dot{\theta})k$

۲۱- دو نقطهٔ A و B در یک صفحهٔ عمودی مفروض است. مسیری از A به B که ذره‌ای به جرم m تحت نیروی گرانش، بدون اصطکاک، در کوتاه‌ترین زمان، در امتداد آن می‌لغزد، از کدام معادله به‌دست می‌آید؟



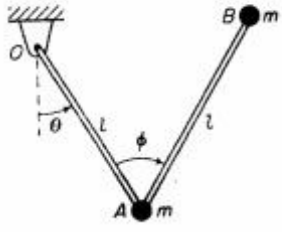
۱) $y+y'^{۲}+yy''=۰$

۲) $۱+y'+y^{۲}y''=۰$

۳) $y+y'+y'^{۲}y''=۰$

۴) $۱+y'^{۲}+۲yy''=۰$

۲۲- جرم‌های ذره‌ای A و B ، هر کدام با جرم m به میله‌های بدون جرم با طول l متصل‌اند. میله‌ها در A و O لولا شده‌اند. با فرض اینکه همهٔ حرکت در یک صفحهٔ افقی باشد، و با فرض شرایط اولیهٔ $\theta(۰)=\phi(۰)=۰,\dot{\theta}(۰)=۰,\dot{\phi}(۰)=\omega_{۰}$، رابطهٔ بین دو سرعت زاویه‌ای $\dot{\theta}$ و $\dot{\phi}$ برحسب تابعی از زاویهٔ ϕ، برابر کدام است؟



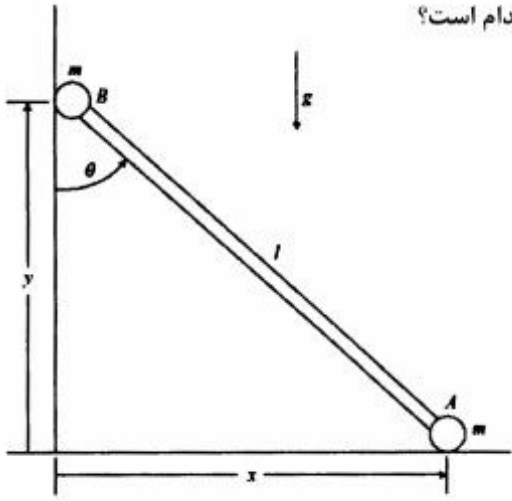
۱) $\dot{\theta}=(\frac{۲-۳\cos\phi}{۱-\cos\phi})\dot{\phi}$

۲) $\dot{\theta}=(\frac{۳-\cos\phi}{۲+\cos\phi})\dot{\phi}$

۳) $\dot{\theta}=(\frac{۱-\cos\phi}{۳-۲\cos\phi})\dot{\phi}$

۴) $\dot{\theta}=(\frac{۲+۳\cos\phi}{۱+\cos\phi})\dot{\phi}$

۲۳- به هریک از دو سر میلهٔ بدون جرمی به طول **l** مطابق شکل زیر، جرم **m** متصل شده است و روی دو سطح بدون اصطکاک تکیه داده است. از این حالت رها می‌شود. در صورتی‌که فرض شود میله در صفحهٔ قائم حرکت می‌کند، سرعت زاویه‌ای میله هنگامی‌که **B** به سطح افقی می‌رسد، کدام است؟



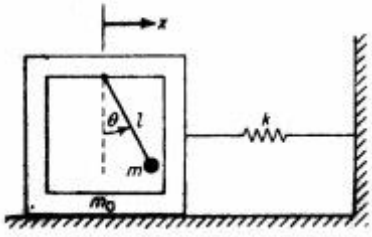
۱) $\frac{g}{l}\sin\theta$

۲) $\frac{g}{l}\cos\theta$

۳) $\frac{g}{l\cos\theta}$

۴) $\frac{g}{l\sin\theta}$

۲۴- در داخل جعبه‌ای با جرم $m_\circ$ یک آونگ ساده با جرم متمرکز **m** و طول **l** نصب شده است. این جعبه به‌همراه یک فنر با سختی **k** تشکیل یک سیستم جرم فنر افقی می‌دهد که می‌تواند روی یک صفحهٔ افقی بدون اصطکاک حرکت افقی انجام دهد. معادلهٔ دیفرانسیل حاکم بر حرکت **x** ، کدام است؟



۱) $(m_\circ+m)\ddot{x}-2ml\ddot{\theta}\sin\theta+ml\dot{\theta}^2\cos\theta+kx=0$

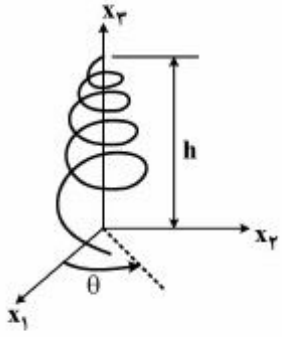
۲) $(m_\circ+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+kx=0$

۳) $(m_\circ+m)\ddot{x}+2ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+kx=0$

۴) $(m_\circ+m)\ddot{x}-ml\ddot{\theta}\cos\theta+ml\dot{\theta}\cos\theta+kx=0$

۲۵- ذره‌ای در مسیر مارپیچ دوکی شکل تحت تأثیر نیروی جاذبه به سمت پایین در حرکت است، به‌طوری‌که:

$$x_1=a\theta\cos\theta$$
$$x_2=a\theta\sin\theta$$
$$x_3=h-a\theta$$



شتاب مماسی ذرّه برحسب پارامتر θ ، کدام است؟ (**a** ثابت است.)

۱) $a_t=a\dot{\theta}^2(2+\theta^2)^{\frac{1}{2}}+a\ddot{\theta}\theta/(2+\theta^2)^{\frac{1}{2}}$

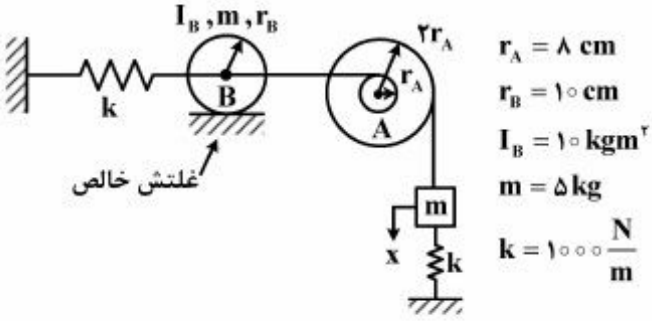
۲) $a_t=a\ddot{\theta}(2+\theta)+a\dot{\theta}^2\theta/(2+\theta)$

۳) $a_t=a\sqrt{2+\theta^2}\,(\ddot{\theta}+\frac{\theta\dot{\theta}^2}{2+\theta^2})$

۴) $a_t=a\theta(\ddot{\theta}+\frac{\theta\dot{\theta}^2}{2+\theta^2})$

ارتعاشات پیشرفته:

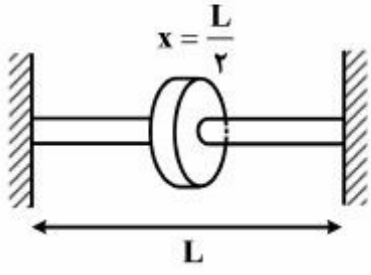
۲۶- در سیستم زیر موقعیت **x** از تعادل استاتیکی جرم **m** اندازه‌گیری شده و از اصطکاک در قرقرهٔ **A** و جرم آن صرف‌نظر می‌شود. استوانهٔ **B** بر روی سطح غلتش بدون لغزش می‌کند. با توجه به مقادیر عددی داده شده، فرکانس طبیعی سیستم چند $\frac{rad}{s}$ است؟ (I_B حول مرکز جرم استوانه است.)



$r_A = 8\ cm$
$r_B = 10\ cm$
$I_B = 10\ kgm^2$
$m = 5\ kg$
$k = 1000\ \frac{N}{m}$

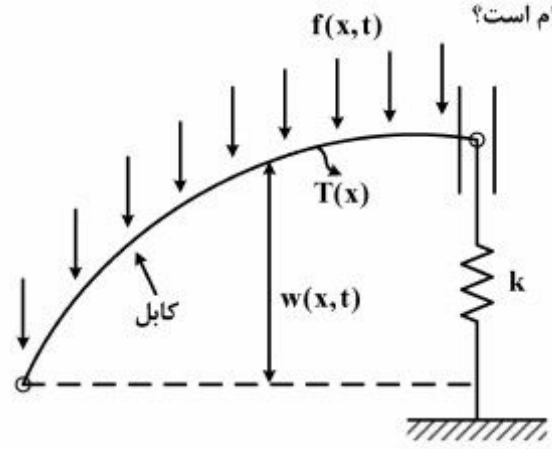
۱) ۲/۲۰۸۶
۲) ۲/۲۱۴۰
۳) ۴/۸۷۸۰
۴) ۱۴/۱۴۲۱

۲۷- معادلهٔ فرکانسی ارتعاشات پیچشی سیستم زیر شامل یک شفت با دو سرگیردار و حامل یک دیسک در مرکز آن، کدام است؟ (**J** ممان اینرسی قطبی سطح مقطع شفت، $J_\circ$ ممان اینرسی دیسک و **c** ثابت موج است.)



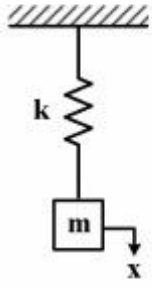
۱) $\sin\frac{\omega L}{2c} = \frac{GJL}{J_\circ c^2}$
۲) $\tan\frac{\omega L}{2c} = \frac{2c}{\omega L}\frac{GJL}{J_\circ c^2}$
۳) $\cos\frac{\omega L}{2c} = \frac{GJ_\circ L}{Jc^2}$
۴) $\tan\frac{\omega L}{c} = \frac{c}{\omega L}\frac{GJ_\circ L}{Jc^2}$

۲۸- معادلهٔ ارتعاشی کابل تحت بارگذاری گستردهٔ $f(x,t)$، کدام است؟



۱) $-\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + f = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$
۲) $-T(x)\frac{\partial w}{\partial x} + f = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$
۳) $\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] + f = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$
۴) $\frac{\partial}{\partial x}\left[T(x)\frac{\partial w}{\partial x}\right] - f = \rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$

۲۹- معادلهٔ ارتعاشات سیستم روبه‌رو، حول وضعیت تعادل استاتیکی با فرض آنکه نیروی فنر با مجذور جابه‌جایی در سختی فنر (k) برابر باشد، کدام است؟



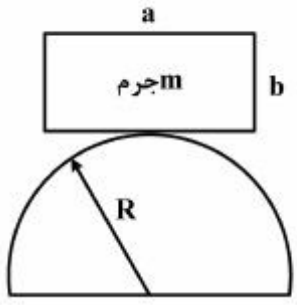
۱) $m\ddot{x} + kx^2 + 2\sqrt{kmg}\,x = 0$

۲) $m\ddot{x} + kx^2 + \sqrt{mgk}\,x = 0$

۳) $m\ddot{x} + kx^2 + mg = 0$

۴) $m\ddot{x} + kx^2 = 0$

۳۰- بلوک مستطیلی شکل به ابعاد **a** و **b** با چگالی یکسان بر روی یک سطح نیم‌دایره به شعاع **R** نوسان می‌کند. با فرض آن‌که هیچ‌گونه لغزش صورت نمی‌گیرد و وضعیت ارتعاشات در حالت ماناست. انرژی جنبشی بلوک به‌صورت تابعی از پارامترهای ارائه شده و زاویهٔ بلوک با افق θ ، کدام است؟



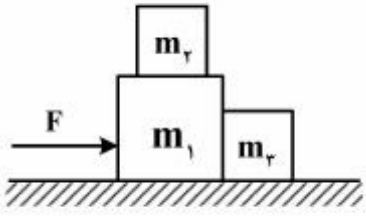
۱) $\frac{1}{2}m\left[R^2\theta^2 + \frac{a^2+b^2}{12}\right]\dot{\theta}^2$

۲) $\frac{1}{24}m(a^2+b^2)\dot{\theta}^2$

۳) $\frac{1}{2}m(\frac{b^2}{4} + R^2\theta^2)\dot{\theta}^2$

۴) $\frac{1}{2}m\left[\frac{b^2}{3} + R^2\theta^2 + \frac{1}{12}a^2\right]\dot{\theta}^2$

۳۱- سه بلوک مطابق شکل زیر، قرار گرفته‌اند. نیروی **F** به یکی از آن‌ها وارد می‌شود. چنانچه ضریب اصطکاک بین هر دو سطح μ باشد، حداکثر مقدار نیروی **F** بدون آنکه بلوک m_2 بر روی بلوک m_1 بلغزد، کدام است؟



۱) $2\mu g(m_1 + m_2 - m_3)$

۲) $3\mu g(m_1 + m_2 + m_3)$

۳) $2\mu g(m_1 + m_2 + m_3)$

۴) $\mu g(m_1 + m_2 + m_3)$

۳۲- روش‌های استخراج معادلات حرکت اجسام صلب، کدام است؟

۱) دالامبر، هیلز، اصل همیلتون، گیبس ـ اپل

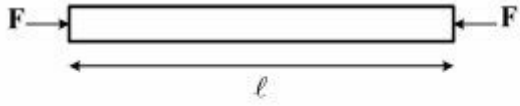
۲) کینز، دالامبر ، اصل همیلتون، گیبس ـ اپل

۳) هیلز، اصل همیلتون، کپلر، دالامبر

۴) کینز، دالامبر ، اصل همیلتون، کپلر

۳۳- میله‌ای به طول l در ابتدا تحت نیروهای مساوی F در هر دو انتها فشرده می‌شود. اگر نیروهای فشاری یک مرتبه حذف شوند، پاسخ ارتعاشات طولی میله کدام است؟

(c ثابت موج) (فشردگی واحد δ در $t = 0$ ، به‌صورت $u_{t=0} = \frac{\delta l}{2} - \delta x$ است.)



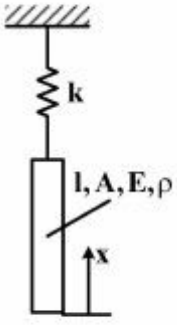
۱) $\frac{4\delta l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$

۲) $\frac{8\delta l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$

۳) $\frac{8\delta l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$

۴) $\frac{4\delta l}{\pi^2}\sum_{n=1,3,\ldots}\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\cos\left(\frac{n\pi ct}{l}\right)$

۳۴- برای ارتعاش طولی محور الاستیک که جنس و مقطع آن (A,ρ,E) ثابت است، معادلهٔ فرکانسی کدام است؟



$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

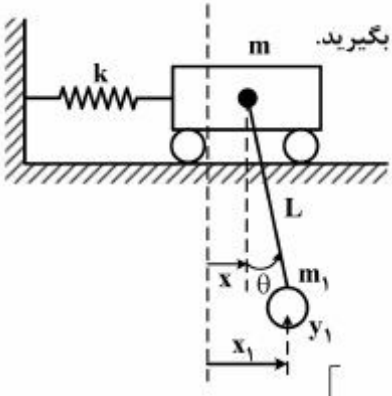
۱) $\sin\frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A}$

۲) $\cos\frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A}$

۳) $\tan\frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A}$

۴) $\cot\frac{\omega l}{c} = \frac{kc}{E\omega A}$

۳۵- معادلات حرکت سیستم زیر، کدام است؟ دامنهٔ ارتعاشات را کوچک درنظر بگیرید.



۱) $\begin{bmatrix} m+m_1 & m_1L \\ m_1L & (m+m_1)L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1gL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

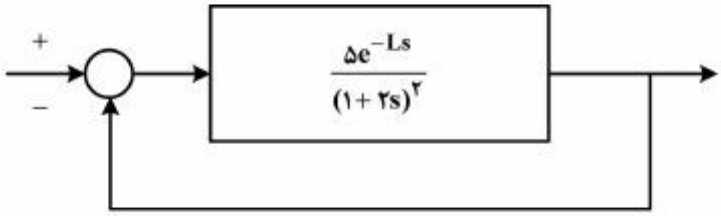
۲) $\begin{bmatrix} m & (m+m_1)L \\ (m+m_1)L & m_1L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & (m+m_1)gL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

۳) $\begin{bmatrix} m & m_1L \\ m_1L & m_1L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1gL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

۴) $\begin{bmatrix} m+m_1 & m_1L \\ m_1L & m_1L^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{\theta}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & m_1gL\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$

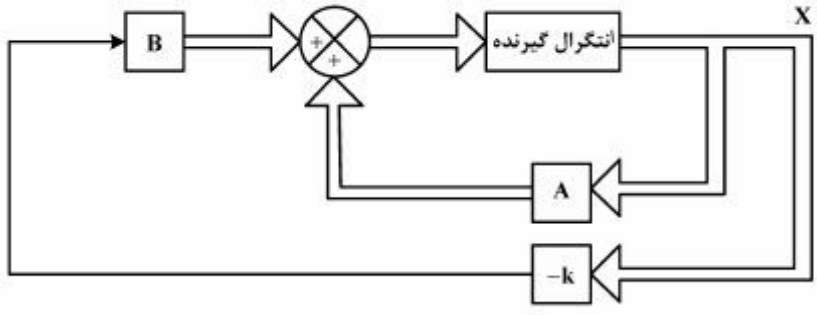
کنترل پیشرفته:

۳۶- در سیستم مدار بستهٔ شکل زیر، سیستم اصلی مرتبه ۲ با تأخیر خالص L ثانیه است. مقدار زمان تأخیر L چند ثانیه باشد، تا حد فاز در این سیستم مدار بسته مساوی 45° شود؟



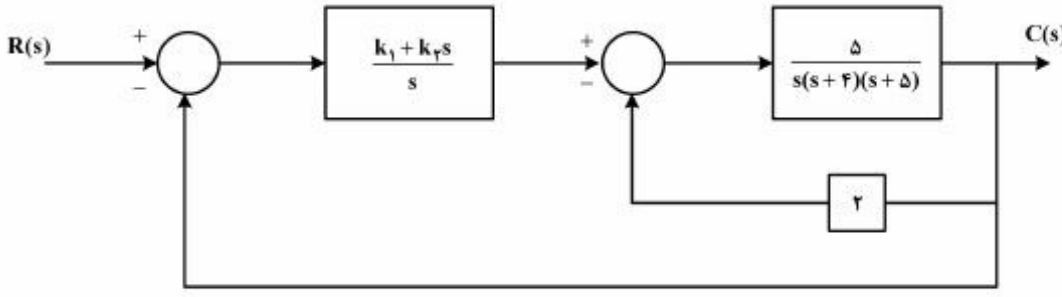
۱) ۰/۱۴۲
۲) ۱/۶۶
۳) ۲/۳۱
۴) ۳/۲۴

۳۷- با توجه به نمودار بلوکی زیر، اگر $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$ باشد، ماتریس بهرهٔ k چقدر باشد، تا قطب‌های رگولاتور در $S_{1,2}=-1\pm j$ قرار گیرند؟



۱) $\begin{bmatrix}4 & 3\end{bmatrix}$
۲) $\begin{bmatrix}3 & 4\end{bmatrix}$
۳) $\begin{bmatrix}3 & 2\end{bmatrix}$
۴) $\begin{bmatrix}2 & 3\end{bmatrix}$

۳۸- دیاگرام جعبه‌ای یک سیستم کنترل فیدبک در شکل زیر نمایش داده شده است. معادلات حالت این سیستم در فرم مشاهده‌پذیر (OCF)، کدام است؟



۱) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&0&0&-9\\1&0&0&-20\\0&1&0&-10-5k_2\\0&0&1&-5k_1\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5k_1\\5k_2\\0\\0\end{bmatrix}u(t), c(t)=\begin{bmatrix}5k_1 & 5k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}x$

۲) $\dot{x}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\-5k_1&-10-5k_2&-20&-9\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}u(t), c(t)=\begin{bmatrix}5k_1 & 5k_2 & 0 & 0\end{bmatrix}x$

۳) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-5k_1&1&0&0\\-10-5k_2&0&1&0\\-20&0&0&1\\-9&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}5k_1\\5k_2\\0\\0\end{bmatrix}u(t), c(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x$

۴) $\dot{x}=\begin{bmatrix}-9&1&0&0\\-20&0&1&0\\-10-5k_2&0&0&1\\-5k_1&0&0&0\end{bmatrix}x+\begin{bmatrix}0\\0\\5k_2\\5k_1\end{bmatrix}u(t), c(t)=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}x$

۳۹- در سیستم کنترل زیر:

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & -۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۳ \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

تابع تبدیل سیستم کدام است و سیستم، کنترل‌پذیر و شهودپذیر هست یا نه؟

۱) $G(s) = \frac{۱}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$، شهودپذیر و کنترل‌پذیر

۲) $G(s) = \frac{۱}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$، شهودپذیر و غیر کنترل‌پذیر

۳) $G(s) = \frac{۱}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$، غیرشهودپذیر و غیرکنترل‌پذیر

۴) $G(s) = \frac{۱}{s+۱}$، غیر شهودپذیر و غیر کنترل‌پذیر

۴۰- یک سیستم خطی درجه دو LTI با شرایط اولیه داده شده است و پاسخ سیستم به پلهٔ واحد به صورت زیر است:

$$\mathbf{y(t)} = ۰/۵ - \mathbf{e^{-t}} + ۲\mathbf{e^{-۲t}} \qquad \mathbf{t} \geq ۰$$

پاسخ سیستم مشابه فوق، با شرایط اولیهٔ یکسان نسبت به ورودی $۲u_{-۱}(t)$ (پله با دامنهٔ ۲) به صورت زیر است:

$$\mathbf{y(t)} = ۱ - ۱/۵\mathbf{e^{-t}} + ۰/۷\mathbf{e^{-۲t}}$$

پاسخ حالت صفر (Zero state) به ورودی پله و تابع تبدیل سیستم کدام است؟

۱) $y_{zs}(s) = \frac{۵}{s} + \frac{۲}{s^۲+۱}$, $H_{(s)} = \frac{۵s^۲ + ۵ + ۲s}{s(s^۲+۱)}$

۲) $y_{zs}(s) = \frac{۰/۵}{s} - \frac{۰/۵}{s+۱} - \frac{۱/۳}{s+۲}$, $H_{(s)} = \frac{-۱/۳s^۲ - ۰/۸s + ۱}{(s+۱)(s+۲)}$

۳) $y_{zs}(s) = \frac{۰/۵}{s+۱} - \frac{۱}{s+۲} + ۵$, $H_{(s)} = \frac{s^۳ + ۲s^۲ + ۵}{(s+۱)(s+۲)}$

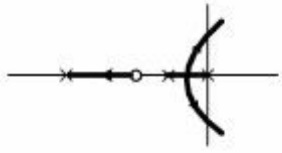
۴) $y_{zs}(s) = \frac{۱}{s} - \frac{۲}{s+۱} - \frac{۰/۵}{s+۳}$, $H_{(s)} = \frac{s^۳ + s^۲ + s}{(s+۱)(s+۳)}$

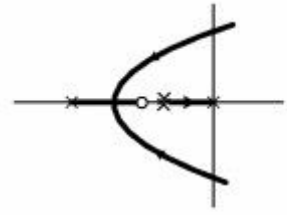
۴۱- یک سیستم مدار ـ بسته دارای معادلهٔ مشخصه زیر است:

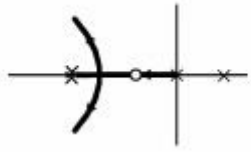
$$۱+\mathbf{kG(s)}=۱+\frac{\mathbf{k(s+۱)}}{\mathbf{s(s+۲)(s+۴)^{۲}}}=۰$$

دیاگرام مکان ریشه‌های آن، کدام است؟

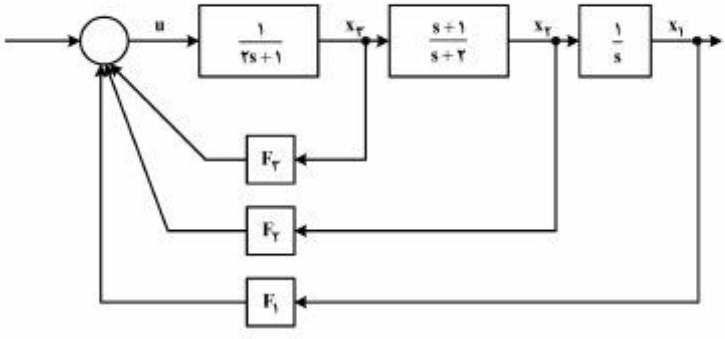
۱)

۲) 

۳) 

۴) 

۴۲- برای تقریر قطب‌های مدار ـ بستهٔ سیستم زیر در نقاط -۱ ، $-۳\pm \mathbf{j}$ انتخاب مناسب $\mathbf{F_i}$ ، $\mathbf{i}=۱,۲,۳$ کدام است؟



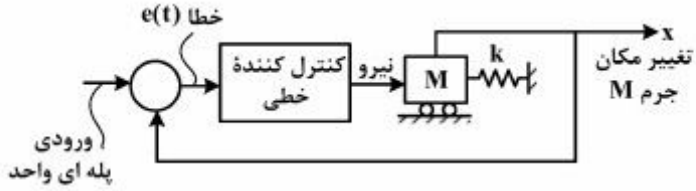
۱) $F=\left[-۱۰,-۱۵,-۵\right]$

۲) $F=\left[-۲۰,-۸,-۱\right]$

۳) $F=\left[۸,۲۰,۵\right]$

۴) $F=\left[۱,-۱۰,-۵\right]$

۴۳- در سیستم جرم و فنر زیر جرم روی سطح افقی بدون اصطکاک جابه‌جا می‌شود. هدف کنترل پاسخ $y = x(t)$ است که x تغییر مکان جرم M است. مقادیر M و k به ترتیب $1kg$ و $4 \frac{N}{m}$ است. یکی از انواع کنترل کننده‌های خطی زیر را طوری انتخاب کنید که نسبت استهلاک سیستم مدار بسته $\zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ و حداکثر خطای حالت ماندگار به ازای ورودی مبنای پله‌ای واحد مساوی $0/1$ شود.



نام کنترل کننده	$G_c(s)$
P-action:	k_c
PI-action	$k_c + k_I \frac{1}{s}$
PD-action	$k_c + k_D\, s$
PID-action	$k_c + k_I \frac{1}{s} + k_D\, s$

۱) کنترل کنندهٔ PID با ضرایب $k_c = 12$ $k_I = 6/2$ $k_D = 25$

۲) کنترل کنندهٔ PI با ضرایب $k_c = 24$, $k_I = 9/4$

۳) کنترل کنندهٔ PD با ضرایب $k_c = 36$ $k_D = 8/9$

۴) کنترل کنندهٔ P با ضریب $k_c = 6$

۴۴- برای سیستم دینامیکی خطی نامتغیر با زمان، رابطهٔ $\dot{x} = Ax$, $y = Cx$ برقرار است که در آن $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -6 \end{bmatrix}$ می‌باشد. پاسخ این سیستم به ازای شرایط اولیهٔ $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ به صورت $y(t) = 2e^{-5t}$ در آمده است. آیا می‌توان در مورد مشاهده‌پذیری این سیستم اظهار نظر نمود، چرا و با چه استدلالی؟ (توجه شود که خروجی اسکالر است و C ماتریس سطری 1×2 است.)

۱) بله می‌توان اظهارنظر نمود و سیستم مشاهده‌پذیر نیست زیرا همهٔ مقادیر ویژه در پاسخ ظاهر نشده‌اند.

۲) بله می‌توان اظهار نظر نمود و سیستم مشاهده‌پذیر است زیرا بردارهای ویژهٔ ماتریس A برهم عمود نیستند.

۳) خیر نمی‌توان اظهار نظر نمود زیرا شرایط اولیه در امتداد هیچ کدام از بردارهای ویژهٔ ماتریس A نیست.

۴) خیر نمی‌توان اظهار نظر کرد زیرا ماتریس سطری C داده نشده است.

۴۵- در تحلیل رفتار سیستم‌های دینامیکی خطی بدون ورودی به صورت $\dot{x} = Ax$ و $x(0) = x_0$ که در آن x بردار ستونی با n جزء و A ماتریس مربع $n \times n$ است. حل سیستم به صورت $x(t) = e^{At}x_0$ داده شده است. (A ماتریس مربع با درایه‌های حقیقی و نامتغیر با زمان است.) در مورد صحت رابطهٔ $e^{(A_1+A_2)t} = e^{A_1 t}.e^{A_2 t}$، کدام پاسخ صحیح است؟ ($A_1$, A_2 هم بعد هستند.)

۱) فقط وقتی صحیح است که A_1 و A_2 قطری باشند. ۲) فقط وقتی صحیح است که $A_1 A_2 = A_2 A_1$ باشد.

۳) درهیچ شرایطی صحیح نیست. ۴) همواره صحیح است.